جعفر اسدی گرمارودی

قطرها را با روش من بشمار!

یک مسئله و چند راه حل

تعداد قطرهای یک چندضلعی چندتاست؟

اگر تعداد اضلاع چندضلعی زیاد باشد، شمردن تعداد قطرها کار ساده‌ای نخواهد بود!

پس شاید بد نباشد به‌دنبال الگو یا رابطه‌ای باشیم که تعداد قطرهای هر n‌ضلعی را به ما بدهد. در ادامهٔ این مطلب تلاش می‌کنیم از راه‌های متفاوت چنین رابطه‌ای را بیابیم.

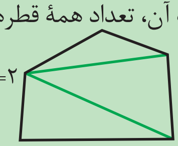
روش اول

کار خود را با بررسی حالت‌های خاص، یعنی مثلث، چهارضلعی، پنج‌ضلعی و...، آغاز می‌کنیم.

اما قبل از بررسی، ضروری است توضیحاتی دربارهٔ چگونگی شمارش قطرها بدهم:

تفکر نظام‌دار

رأس‌های چندضلعی برای ایجاد نظم فکری در بررسی‌ای که قصد داریم انجام دهیم، نقش حیاتی دارند. درواقع ما تعداد قطرهایی را که از هر رأس می‌توان رسم کرد، می‌شماریم و بعد، به کمک آن، تعداد همهٔ قطرهای آن چندضلعی را پیدا می‌کنیم.



۲=(۳-۵)

همان‌طور که در شکل می‌بینید، در پنج‌ضلعی از رأس مشخص شده، فقط دو قطر می‌توان رسم کرد. این موضوع برای هر رأس پنج‌ضلعی برقرار است. زیرا از هر رأس، به خودش و دو رأس کناری‌اش نمی‌توان قطری رسم کرد و پنج‌ضلعی، کلاً پنج رأس دارد. بنابراین از رأس موردنظر فقط به دو رأس دیگر (۲=۳-۵) می‌توان دو قطر وصل کرد.

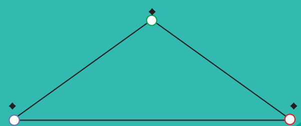
اکنون آماده هستیم که الگوی قطرها را بررسی کنیم.

کشف الگو: مثلث

از آنجا که قطر رأس‌های غیرمجاور را به هم وصل می‌کند، مثلث نمی‌تواند قطری داشته باشد.

در واقع از هر رأس، ۰=۳-۳ قطر رسم می‌شود!

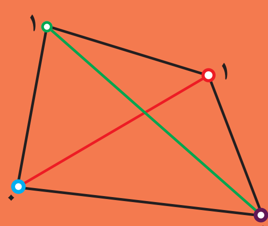
۰=۰+۰+۰



کشف الگو: چهارضلعی

از هریک از رأس‌های سبز و قرمز رنگ فقط یک قطر می‌توان رسم کرد. از هریک از رأس‌های آبی و بنفش نیز یک قطر می‌توان رسم کرد. ولی این قطرها قبلاً از سمت رأس‌های سبز و قرمز رسم شده‌اند و نباید دوباره شمرده شوند. پس از رأس‌های آبی و بنفش، قطر جدیدی نمی‌توان رسم کرد.

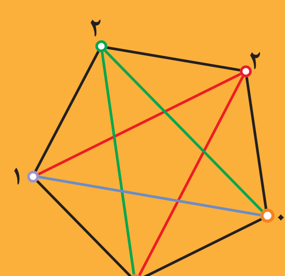
۲=۰+۰+۱+۱



کشف الگو: پنج‌ضلعی

با توجه به توضیحات داده شده برای چهارضلعی، تعداد قطرهای غیرتکراری را که می‌توان از هر رأس رسم کرد، در کنارش نوشته‌ایم:

۵=۰+۰+۱+۲+۲



و همین کار را برای **شش‌ضلعی** انجام می‌دهیم:

۹=۰+۰+۱+۲+۳+۳

حالا اگر عبارت‌های جمع را بررسی کنیم، می‌بینیم که در شمارش قطرها از یک رأس شروع کردیم که دو عدد اول با هم برابر بودند و بعد از آن، یکی یکی کم شد تا به یک رسید. همیشه هم قطرهایی که از دو رأس آخر می‌گذرند، قبلاً شمرده شده‌اند.

بنابراین برای n ضلعی داریم:

$$(n-۳)+(n-۳)+(n-۴)+...+۱+۰+۰=$$

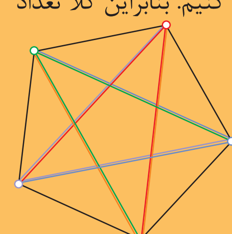
و برای مثال، برای ده‌ضلعی داریم:

$$(۱۰-۳)+(۱۰-۳)+(۱۰-۴)+...+۱+۰+۰=۷+۷+۶+۵+...+۱+۰+۰=۳۵$$

روش دوم

این‌بار سعی می‌کنیم با شیوهٔ دیگری قطرها را بشماریم و الگوی دیگری به‌دست آوریم. باز از یک پنج‌ضلعی کمک می‌گیریم.

از هر رأس قطرها را رسم می‌کنیم، حتی اگر تکراری باشند. از هر رأسی ۲=۳-۵ قطر می‌توانیم رسم کنیم. بنابراین کلاً تعداد قطرهای پنج‌ضلعی برابر است با:



$$\frac{۵\times۲}{۲}=۵$$

(تقسیم بر ۲ به‌دلیل آن است که هر قطر، دو بار شمرده شده است.)

به‌طور کلی برای n ضلعی تعداد قطرها برابر است با:

$$\frac{n\times\overbrace{(n-۳)}^{\text{تعداد قطرهای رسم شده از هر رأس}}}{\underbrace{۲}_{\text{هر قطر دو بار محاسبه شده است}}}$$

تعداد اضلاع ← n

مثلاً تعداد قطرهای ده‌ضلعی از ایـن روش، باز هم برابر با ۳۵ خواهد بود:

$$\frac{۱۰\times(۱۰-۳)}{۲}=۳۵$$

روش سوم

باز هم به کمک یک پنج‌ضلعی سعی می‌کنیم الگوی دیگری به‌دست آوریم. با این تفاوت که در این روش فقط رأس‌ها را می‌کشیم:

می‌خواهیم تمـام پاره‌خط‌هایی را که این پنج رأس، دو سـر آن‌ها خواهند بود، رسـم کنیم؛ حتـی اگر تکراری باشـند. یا حتـی اگر جزو ضلع‌های پنج‌ضلعی اصلی باشند.

از روی شـکل دیده می‌شـود که از هر رأس می‌توان چهار پاره‌خط رسم کرد. پس:

$$۱۰=\frac{۵\times۴}{۲}=\text{کل پاره‌خط‌ها}$$

(تقسیم بر ۲ برای این است که هر پاره‌خط دو مرتبه شمرده شده است.)

اما از این ۱۰ پاره‌خط ۵تای آن‌ها ضلع است. پس:

تعداد قطرها=۱۰-۵=۵

و به‌طور کلی برای n ضلعی داریم:

$$\frac{n\times\overbrace{(n-۱)}^{\text{تعداد پاره‌خط‌های رسم شده از هر رأس}}}{\underbrace{۲}_{\text{هر پاره‌خط دو بار شمرده شده است}}}-n$$

تعداد رأس ← n؛ تعداد اضلاع ← n

تعداد قطرهای ده‌ضلعی را از این روش نیز محاسبه کنید. آیا باز هم ۳۵ قطر می‌شود؟

سخن آخر. با سه روش مختلف، تعداد قطرهای یک n ضلعی را شمردیم. توجه کنید که عدد به‌دست آمده از هر سه روش، یکی است. آیا می‌توانید دلیل این موضوع را بگویید؟